Il teorema del trasporto

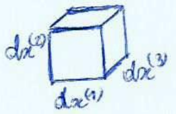
Eseguiamo la derivata materiale di $\int_{V(t)} F\, dV$, con $V=V(t)$ volume materiale di fluido (volume che contiene sempre le stesse particelle fluide):

$$\frac{d}{dt}\int_V F\,dV = \int_V \frac{dF}{dt}\cdot dV + \int_V F\,\frac{d(dV)}{dt} = \int_V\left[\frac{dF}{dt}+F\,\nabla\cdot\underline{v}\right]dV$$

Non è possibile calcolare l'integrale e poi derivare: la derivata di un numero è zero. Per questo abbiamo portato la derivata dentro all'integrale. Ricordando il legame tra derivata locale e materiale:

$$\int_V\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\underline{v}\cdot\nabla F+F\,\nabla\cdot\underline{v}\right]dV=\int_V\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\cdot(F\underline{v})\right]dV$$

Nei primi integrali abbiamo sfruttato l'uguaglianza $\frac{d(dV)}{dt}=dV\cdot\nabla\cdot\underline{v}$. Infatti:



$$\begin{aligned}\frac{d(dV)}{dt} &= \frac{d(dx_1^{(1)}\cdot dx_2^{(2)}\cdot dx_3^{(3)})}{dt} = \frac{d(dx_1^{(1)})}{dt}\cdot dx_2^{(2)}\cdot dx_3^{(3)} + \\ &+ \frac{d(dx_2^{(2)})}{dt}\, dx_1^{(1)}\cdot dx_3^{(3)} + \frac{d(dx_3^{(3)})}{dt}\cdot dx_1^{(1)}\cdot dx_2^{(2)} = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx_1^{(1)}\cdot dx_2^{(2)}\cdot dx_3^{(3)} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx_2^{(2)}\cdot dx_1^{(1)}\cdot dx_3^{(3)} + \\ &+ \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx_3^{(3)}\cdot dx_1^{(1)}\cdot dx_2^{(2)} = dx_1^{(1)}\cdot dx_2^{(2)}\cdot dx_3^{(3)}\cdot\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\end{aligned}$$

Ne segue che $\frac{d(dV)}{dt} = dV\cdot\nabla\cdot\underline{v}$.

Il teorema del trasporto è espresso dalle equazioni:

$$\frac{d}{dt}\int_V F\,dV = \int_V\left[\frac{dF}{dt}+F\,\nabla\cdot\underline{v}\right]dV \qquad \frac{d}{dt}\int_V F\,dV = \int_V\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\cdot(F\underline{v})\right]dV$$

Passiamo a un integrale di superficie utilizzando il teorema della divergenza:

$$\frac{d}{dt}\int_V F\,dV\Big|_{t=t_0} = \int_{V_0}\frac{\partial F}{\partial t}\,dV + \int_{S_0} F\cdot\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS$$

Abbiamo considerato un istante t_0 per cui $V=V_0$ e $S=S_0$. La derivata materiale dell'integrale a primo membro (di F esteso a V) uguaglia la somma della velocità di variazione dell'integrale di F esteso al volume che è istantaneamente coincidente con V e del flusso di F attraverso la frontiera di V_0.